Prof. Dr. Alfred Toth

# Graphentheoretische Semiotik

## 0. Vorbemerkung

Die Idee, Graphen zur Formalisierung der Semiotik zu benutzen, geht bereits auf Peirce zurück: "Die 'Existenzgraphen', wie Peirce sie zuerst bezeichnete, um später einfach 'Graph' zu sagen, sind ausdrücklich als 'Diagramme' im Sinne von Zeichengebilden verstanden worden, die in der Hauptsache aus 'Punkten' und 'Linien', die bestimmte dieser Punkte verbinden, bestehen. Sie beschreiben damit bereits eine frühe Form dessen, was wir heute 'Netzwerke' nennen" (Bense 1975, S. 60 f.).

Wie wichtig für Peirce die Rolle der Graphentheorie, zu deren Entwicklung er selbst beigetragen hatte, für die Semiotik war, schätzte Bense wie folgt ein: Peirce "versteht die Semiotik als ein System, das zugleich als deskriptive Theorie triadisch-trichotomischer Zeichenrelationen, als deskriptive Theorie diagrammatischer 'Existential-Graphs' und als formale Theorie der 'universellen Algebra der Relationen' entwickelt werden könne" (Bense 1981, S. 131 f.); vgl. auch Peirce (1906; 1971).

## 1. Grundbegriffe

Eiin **Graph** ist ein Paar G = (E, K) disjunkter Mengen mit $K \subseteq [E]^2$. Die Elemente von K sind also 2-elementige Teilmengen von E. Die Elemente von E nennt man die **Ecken** (oder **Knoten**) des Graphen G, die Elemente K seine **Kanten**. Wie die Punkte und die sie verbindenden Linien gezeichnet werden, "ob gerade oder geschwungen, disjunkt oder überkreuz, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Ästhetik: die formale Definition eines Graphen ist jedenfalls von seiner bildlichen Darstellung unabhängig" (Diestel 1996, S. 2).

Eine Ecke e heißt mit einer Kante k **inzident**, wenn $e \in k$ ($k \in K$) gilt. Die beiden mit einer Kante k inzidenten Ecken sind ihre **Endecken**, und k **verbindet** diese Ecken. Für eine Kante {x, y} schreibt man kürzer auch xy oder yx. Zwei Ecken x, y von G sind **adjazent** in G, wenn $xy \in K(G)$ sind. Zwei Kanten sind adjazent, wenn sie eine gemeinsame Endecke haben. Sind je zwei Ecken von G adjazent, so heißt G **vollständig**.

Unter dem **Grad** oder der **Valenz** einer Ecke e von G versteht man die Anzahl der mit e inzidenten Kanten. Eine Ecke vom Grad null heißt eine **isolierte Ecke**. Ein Graph, dessen Kantenmenge leer ist, heißt ein **Nullgraph** bzw. **total unzusammenhängender Graph**. In einem Nullgraphen ist jede Ecke isoliert. Ein Graph, in dem alle Ecken denselben Grad haben, wird **regulärer Graph** genannt.

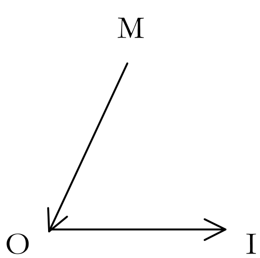
Gilt $E' \subseteq E$ und $K' \subseteq K$, so ist G' ein **Teilgraph** von G (und G ein **Obergraph** von G'), geschrieben $G' \subseteq G$.

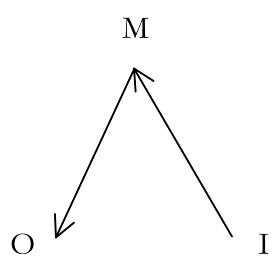
Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn er für je zwei seiner Ecken x, y einen xy-Weg enthält. **Unzusammenhängende** Graphen bestehen also aus Stücken, die nicht miteinander verbunden sind.

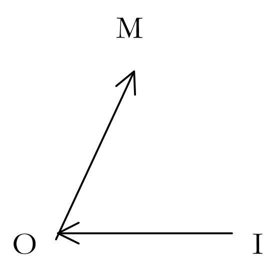
Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar (E, K) diskunkter Mengen (von Ecken und Kanten) zusammen mit zwei Funktionen init: $K \to E$ und ter: $K \to E$, die jeder Kante k eine **Anfangsecke** init(k) und eine **Endecke** ter(k) zuordnen. Die Kante k heißt dann von init(k) nach ter(k) **gerichtet**. Man beachte, daß ein gerichteter Graph zwischen zwei Ecken x, y mehrere Kanten haben kann. Solche Kanten nennt man **Mehrfachkanten**. Haben zwei Mehrfachkanten die gleiche Richtung, so sind sie **parallel**. Ist init(k) = ter(k), so ist k eine **Schlinge** (**Loop**).

## 2. Die Einführung der Zeichenrelation als Graph

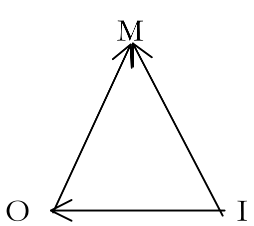
Bense (1971, S. 33ff.) führte die Graphentheorie zur Formalisierung der Semiotik ein und unterschied zunächst zwischen dem generativen Graph ($M \to O \to I$), dem thetischen Graph ($I \to M \to O$) und dem degenerativen Graph ($I \to O \to M$):

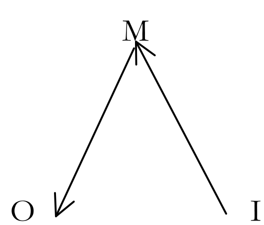


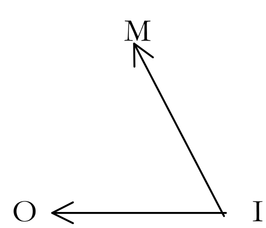





Ferner gab er die Graphen der Objektbezüge, d.h. den iconischen, den indexikalischen und den symbolischen Graph:








Wir haben damit im Falle des iconischen Graphen $(I \to O \to M) \cup (I \to M)$, im Falle des indexikalischen Graphen $(I \to M \to O)$, also die selbe Generationsrichtung wie beim thetischen Graphen, und im Falle des symbolischen Graphen $(I \to M) \cup (I \to O)$.

Wir bekommen damit folgenden Zusammenhang zwischen den Subzeichen des Objekt-bezugs sowie der graphentheoretischen und booleschen Semiotik, wobei "Rep" für Reper-toire stehe und für die Indizes $i \neq j$ gelte:

iconischer Objetkbezug: $(I \to O \to M) \cup (I \to M)$: $(Rep_i \cap Rep_j) \neq \varnothing$

indexikalischer Objektbezug: $(I \rightarrow M \rightarrow O)$: $(Rep_i \cap Rep_j) = \varnothing$ (aber dennoch nexal zusammenhängend)

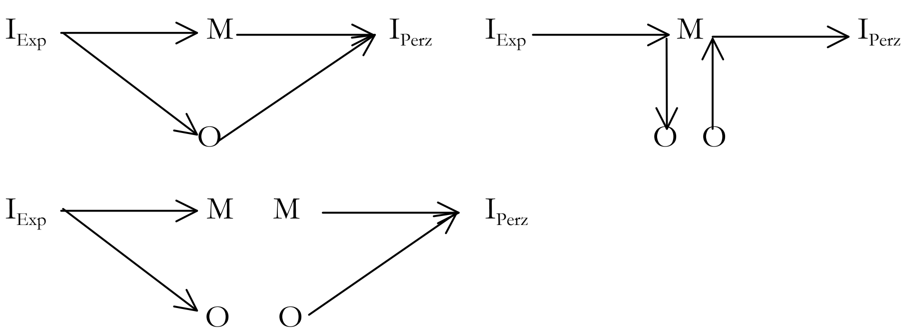
symbolischer Objektbezug: $(I \rightarrow M) \cup (I \rightarrow O)$: $(Rep_i \cap Rep_j) = \varnothing$

## 3. Die Einführung des Kommunikationsschemas als Graph

Auf Berger (1971) geht die Formalisierung des semiotischen Kommunikationsschema mit Hilfe der Graphentheorie zurück. Das Kommunikationsschema hat bekanntlich (Bense 1971, S. 40) die folgende Form:

$$\text{Expedient} \xrightarrow{\text{Kanal}} \text{Perzipient},$$

wobei der Expedient mit dem Objektbezug, der Kanal mit dem Mittelbezug und der Perzipient mit dem Interpretantenbezug korrespondiert. Nach Berger kann das Kommunikationsschema nun ebenfalls hinsichtlich seiner drei Objetkbezüge in einen iconischen, einen indexikalischen und einen symbolischen Kommunikationsgraph differenziert werden:




Hier wird besonders im zweiten Graph, d.h. im indexikalischen Kommunikationsschema, der nexale, aber mengentheoretisch nur durch einen “Trick” faßbare nexale Zusammenhang deutlich (vgl. Zellmer 1982). Im Gegensatz zum iconischen, sind der indexikalische und der symbolische Kommunikationsgrad unzusammenhängend.

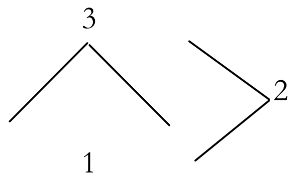
Theoretisch können aus der Menge $Z = (M, O, I)$ und der semiotischen Operation der Generation $(\rightarrow)$ folgende Kombinationen gebildet werden, wobei wir bereits folgenden Beispielen begegnet sind:

| | |
|---|---|
| $(M \rightarrow O \rightarrow I)$: generativer Graph | $(M \rightarrow I \rightarrow O)$: |
| $(O \rightarrow M \rightarrow I)$: kommunikativer Graph | $(O \rightarrow I \rightarrow M)$: |
| $(I \rightarrow M \rightarrow O)$: thetischer Graph | $(I \rightarrow O \rightarrow M)$: degenerativer Graph |

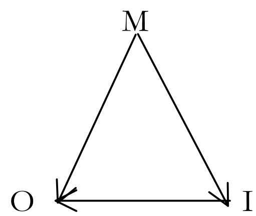
Es stellt sich daher die Frage, ob auch die Generationen $(M \rightarrow I \rightarrow O)$ und $(I \rightarrow O \rightarrow M)$ eine semiotische Interpretation finden.

## 4. Die Einführung des Kreationsschemas als Graph

Das semiotische Kreationsschema hat nach Walther (1979, S. 121) folgende Form:

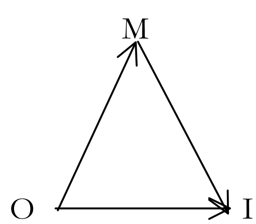



und beruht "auf der Selektion aus Erstheit unter der Berücksichtigung von Drittheit zur Erzeugung von Zweitheit" (Walther 1979, S. 118), mit anderen Worten: Wir haben hier die kategoriale Abfolge, d.h. das Generationsschema (M $\rightarrow$ I $\rightarrow$ O) vor uns, das wir in dem folgenden elementaren Graphen darstellen können:




Wie man sofort erkennt, entsteht dieser neue Typ eines semiotischen Graphen durch Spiegelung an der O-I-Achse aus dem Graphen des iconischen Objektbezugs. Wichtig ist dabei die Feststellung, daß sowohl M als auch I zu O führen, d.h dieser Graphen hat (wie der derjenige des iconischen Objektbezugs) eine Ecke mit Grad 2. Dies korrespondiert im Falle des Kreationsgraphen mit Benses Erkenntnis eines "bilateralen Konstituierungszusammenhangs zwischen einem replikativen Interpretanten und seinem repertoiriellen Mittel auf den Bereich möglicher oder thematisierbarer Objektbezüge" (1983, S. 27).

Wie steht es nun mit O $\rightarrow$ M $\rightarrow$ I? Man könnte sich folgenden Graph denken:

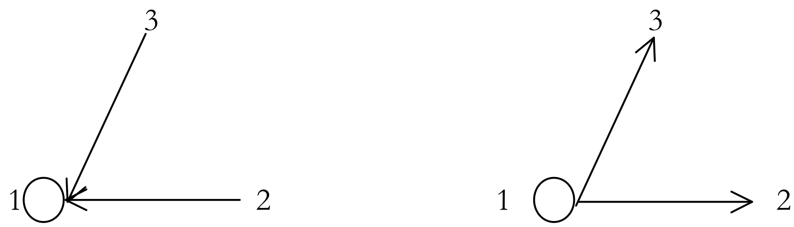



Hier führen also sowohl M als auch O zu I. Vergleicht man ferner die Generation des Kreationsschemas (M $\rightarrow$ I $\rightarrow$ O) und diejenige des obigen Graphen (O $\rightarrow$ I $\rightarrow$ M), so stellt man fest, daß sie dual zueinander sind mit I = const. Semiotisch könnte man also (O $\rightarrow$ I $\rightarrow$ M) mit dem obigen Graphen als Destruktion interpetieren, die vielleicht in der semiotischen Katastrophentheorie Verwendung finden könnte; Arin spricht von "semiotic dissolution" (vgl. Arin 1983).

## 5. Die Darstellung der Zeichenklassen und Realitätsthematiken als Graphen

In der folgenden Darstellung wählen wir, wie inzwischen in der Semiotik üblich, die numerische anstatt der kategorialen Notation der Primzeichen, ferner bezeichnen wir die linke untere Ecke der Graphen mit (.1.), die rechte untere mit (.2.) und die Spitze mit (.3.).

### 5.1. Zkl (3.1 2.1 1.1) × Rth (1.1 1.2 1.3)

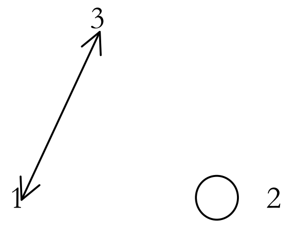



### 5.2.Zkl (3.1 2.1 1.2) × Rth (2.1 1.2 1.3)


### 5.3. Zkl (3.1 2.1 1.3) × Rth (3.1 1.2 1.3)


### 5.4. Zkl (3.1 2.2 1.2) × Rth (2.1 2.2 1.3)

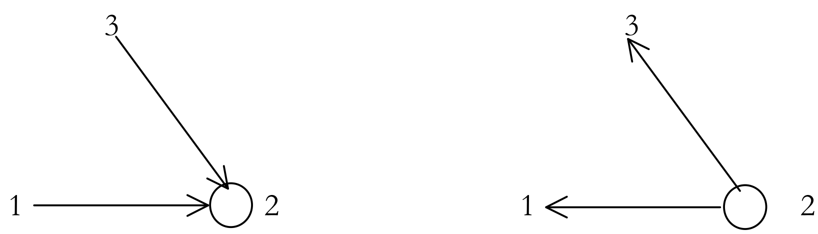
**5.5. Zkl (3.1 2.2 1.2) × Rth (2.1 2.2 1.3)**



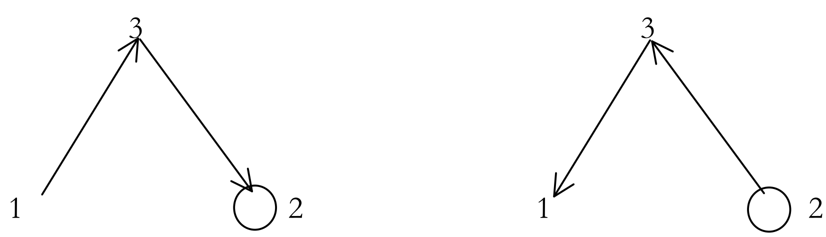

Da hier die dualidentische ("eigenreale") Zkl × Rth vorliegt, sind die Graphen der Zkl und der Rth ebenfalls identisch.

**5.6. Zkl (3.1 2.3 1.3) × Rth (3.1 3.2 1.3)**


**5.7. Zkl (3.2 2.2 1.2) × Rth (2.1 2.2 2.3)**

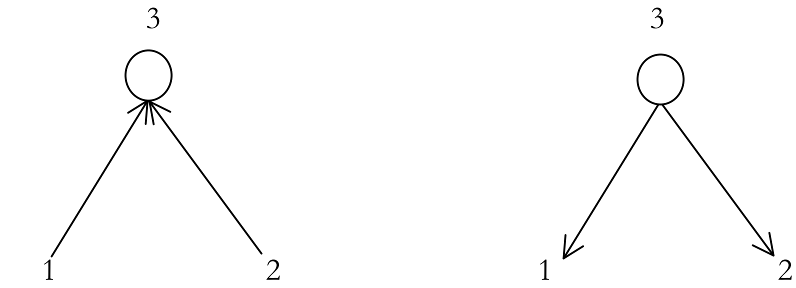



**5.8. Zkl (3.2 2.2 1.3) × Rth (3.1 2.2 2.3)**

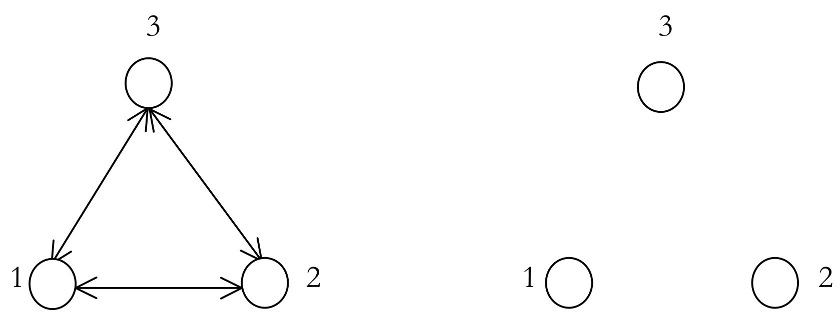



**5.9. Zkl (3.2 2.3 1.3) × Rth (3.1 3.2 2.3)**

**5.10. Zkl (3.3 2.3 1.3) × Rth (3.1 3.2 3.3)**



Ergänzend bringen wir an dieser Stelle auch noch die Graphen der **vollständigen Zeichenrelation** Z × Z = {(1.1), (1.2), (1.3), (2.1), (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), (3.3)} sowie der **Kategorienklasse** (3.3 2.2 1.1):



Diese beiden Graphen sind also die einzigen regulären semiotischen Graphen. Unter den übrigen hier betrachteten Graphen gibt es sowohl vollständige als auch unvollständige semiotische Graphen; alle sind darüber hinaus zusammenhängende semiotische gerichtete Graphen, wobei die genuinen Subzeichen als Loops erscheinen.

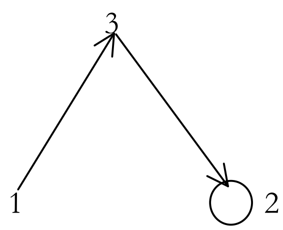
## 6. Semiotische Graphen in Matrizendarstellung

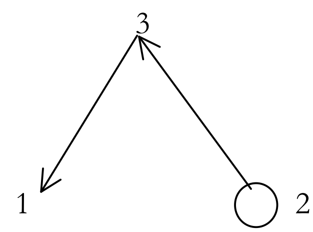
Wie üblich, unterscheiden wir zwischen Adjazenz- und Inzidenzmatrizen.

### 6.1. Semiotische Adjazenzmatrizen

Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph mit der Eckenmenge E(G) = ($x_1$, ..., $x_n$), dann ist seine Adjazenzmatrix A(G) eine n A n-Matrix mit Elementen $a_{ij}$ = 1, falls ($x_i$, $x_j$) bzw. [$x_i$, $x_j$] 0 K(G) gilt, und = 0 sonst.

Nehmen wir als Beispiel die Zkl × Rth (3.2 2.2 1.3) × (3.1 2.2 2.3). Ihr Graph sieht, wie oben dargestellt, wie folgt aus:






Die zugehörigen Adjazenzmatrizen sehen wie folgt aus (links für die Zkl, rechts für die Rth):

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 |

Wie man leicht erkennt, korrespondieren diese semiotischen Adjazenzmatrizen mit den folgenden semiotischen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und stellen darüber hinaus einen Zusammenhang her zur Einführung der körpertheoretischen Semiotik (vgl. Toth 2007, S. 50 ff.).

**6.2. Semiotische Inzidenzmatrizen**

Die Inzidenzmatrix I(G) eines ungerichteten Graphen G mit der Eckenmenge E(G) = ($x_1$, ..., $x_n$) und der Kantenmenge K(G) = ($v_1$, ..., $v_n$) besitzt n Zeilen (Anzahl Ecken) und m Spalten (Anzahl Kanten) mit Elementen $i_{ij}$ = 1, falls $x_i$ Kantenendpunkt von $v_j$ ist, = 0 sonst, wobei i = 1, ...n; j = 1, ..., m. Ist G ein gerichteter Graph, so setzt man: $i_{ij}$ = 1, falls $x_i$ Anfangspunkt von Kante $v_j$ ist, = -1, falls $x_i$ Endpunkt von Kante $v_j$ ist und = 0 sonst.

Nehmen wir als Beispiel wiederum die Zkl × Rth (3.2 2.2 1.3) × (3.1 2.2 2.3) und bezeichnen nun nicht nur die Ecken, sondern auch die Kanten, wobei a:= (M → O), b := (O → I) und c:= (I → O) sei. Dann erhalten wir folgende Inzidenzmatrizen:

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| 1 | +1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | -1 |
| 3 | -1 | 0 | +1 |

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | +1 |
| 3 | +1 | 0 | -1 |

mit ihren zugehörigen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassend können wir also festhalten: Geht man von Inzidenzmatrizen aus, so muß man wissen, welche Kanten welches Label tragen, um den entsprechenden Graphen und die entsprechende Zkl×Rth zu rekonstruieren. Geht man hingegen von Adjazenzmatrizen aus, so kann man zwar sofort die entsprechende Zkl×Rth rekonstruieren, den entsprechenden Graphen aber erst, nachdem man die Zkl×Rth rekonstruiert hat.

**Literatur**


Arin, Ertekin, Die semiotische Katastrophe. In: Semiosis 30, 1983, S. 21-33

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Berger, Wolfgang, Eine Darstellung der Generierung und Kommunikation von Zeichen durch Graphen. In: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft 12/1, 1971, S. 1-7

Diestel, Reinhard, Graphentheorie. Berlin 1996

Peirce, Charles S., Prolegomena to an apology for pragmaticism. In: The Monist 6/4, 1906, S. 492-546

Peirce, Charles S., Graphen und Zeichen. Stuttgart 1971 (= rot 44).

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Zellmer, Siegfried, Zum mathematischen Zusammenhang zwischen Ikonizität, Indexikalität und Symbolizität. In: Semiosis 27, 1982, S. 5-14